

## Лекция 19. Метод конечных элементов в механике упругого тела

1. Сущность метода конечных элементов (МКЭ) и вычисление потенциальной энергии деформации конечного элемента
2. Потенциальная энергия деформации упругого тела в приближении МКЭ
3. Уравнения МКЭ и интерпретация метода с помощью узловой модели упругого тела
4. Пример расчета

### 1

МКЭ представляет собой реализацию принципа возможных перемещений для расчета НДС деформируемых систем [30, подразд. 2.2]. Для обоснования МКЭ применительно к упругим системам может служить принцип минимума полной потенциальной энергии. Далее этот метод будет рассматриваться для случая неподвижного упругого тела [30; 16].

В МКЭ состояние упругого тела приближенно задается конечным числом степеней свободы. Согласно этому методу за степени свободы<sup>1</sup> принимаются перемещения известной совокупности точек тела, называемых узлами. Узлы служат вершинами многогранников, на которые мысленно разбивается упругое тело. В методе выявляются упругие свойства каждого многогранника, более точно, устанавливаются приближенные соотношения связи деформаций, напряжений и в конечном счете потенциальной энергии деформации с перемещениями вершин многогранника. Суммарная потенциальная энергия деформации тела должна определяться по этим соотношениям с бесконечно малой погрешностью при уменьшении размеров многогранников. При наличии таких соотношений многогранники называются *конечными элементами*. **МКЭ состоит в представлении потенциальной энергии упругого тела через перемещения узлов и составлении системы линейных уравнений для перемещений, обеспечивающих минимум полной потенциальной энергии упругого тела. Решением этих уравнений определяются перемещения узлов, и устанавливается НДС.**

Ограничимся случаем плоского неподвижного упругого тела толщиной  $\delta$  в плоском напряженном состоянии. Перемещения тела рассматриваем в связанной с землей СК  $O'xу$ . Перемещения обозначаем, как обычно,  $u$  и  $v$ . Будем выбирать сетку узлов так, чтобы точки опор и приложения нагрузок совпадали с узлами. Полагаем, что опорные закрепления могут уничтожать одну из степеней свободы  $x$ ,  $y$  или одновременно обе эти степени свободы. Иначе говоря, на перемещения опорного узла налагаются ограничения:

$$u = 0 \quad (19.1)$$

или

$$v = 0 \quad (19.2)$$

или

$$u = 0 \text{ и } v = 0. \quad (19.3)$$

---

<sup>1</sup> Степенью свободы допустимо называть переменную из совокупности независимых переменных, определяющих состояние системы. В отечественной литературе такую переменную обычно называют обобщенной координатой [17].

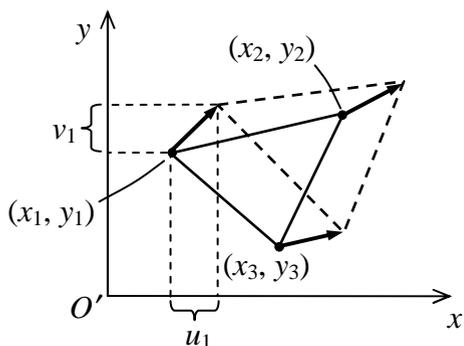


Рис. 19.1. Конечный элемент до деформирования (сплошной контур) и после деформирования (штриховой контур)

Конечные элементы введем в форме треугольников, для каждого из которых задан **линейный закон** изменения перемещений. Это допущение означает, что каждый из треугольников сохраняет треугольную форму при деформировании и, следовательно, обеспечивается континуальность деформированного тела (непрерывность материальной среды). Задавая положение недеформированного элемента координатами узлов, представим потенциальную энергию деформации элемента через перемещение узлов (рис. 19.1).

Введем

$$\mathbf{t}^T = (u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3) \quad (19.4)$$

— вектор перемещений вершин элемента (индекс указывает номер вершины);

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy})$$

— вектор деформаций в пределах элемента;

$$\boldsymbol{\sigma}^T = (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$$

— вектор напряжений в пределах элемента.

Благодаря линейности перемещений по координатам вектор деформаций в пределах элемента не зависит от координат. Обозначим  $\mathbf{A}$  — матрицу связи деформаций с перемещениями вершин элемента, т. е. такую матрицу, что  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}\mathbf{t}$ ;  $\mathbf{C}$  — матрицу закона Гука, т. е. такую матрицу, что  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}$ . Матрица  $\mathbf{C}$  имеет вид:

$$\mathbf{C} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{pmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{pmatrix}. \quad (19.5)$$

Можно видеть, что она симметрична.

Для потенциальной энергии деформации элемента объема  $V$  имеем:

$$U_1 = \frac{V}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{V}{2} (\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon})^T \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{V}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C}^T \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{V}{2} (\mathbf{A}\mathbf{t})^T \mathbf{C} (\mathbf{A}\mathbf{t}), \quad (19.6)$$

или окончательно:

$$U_1 = \frac{V}{2} \mathbf{t}^T \mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{t} = \frac{1}{2} \mathbf{t}^T \mathbf{R} \mathbf{t}, \quad (19.7)$$

где введена в рассмотрение *матрица жесткости конечного элемента*:

$$\mathbf{R} = V \mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A}. \quad (19.8)$$

Установим вид матрицы связи  $\mathbf{A}$ , для чего выпишем линейные зависимости для перемещений в пределах конечного элемента:

$$\begin{aligned} u &= a_1 x + b_1 y + c_1; \\ v &= a_2 x + b_2 y + c_2. \end{aligned} \quad (19.9)$$

Имеем:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = a_1; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = b_2; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = b_1 + a_2. \quad (19.10)$$

Коэффициенты в правых частях выразим через перемещения вершин треугольника, решив две системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 a_1 + y_1 b_1 + c_1 = u_1; \\ x_2 a_1 + y_2 b_1 + c_1 = u_2; \\ x_3 a_1 + y_3 b_1 + c_1 = u_3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 a_2 + y_1 b_2 + c_2 = v_1; \\ x_2 a_2 + y_2 b_2 + c_2 = v_2; \\ x_3 a_2 + y_3 b_2 + c_2 = v_3. \end{cases} \quad (19.11)$$

Правило Крамера дает:

$$\begin{aligned} a_1 &= \Delta^{-1}[u_1(y_2 - y_3) + u_2(y_3 - y_1) + u_3(y_1 - y_2)]; \\ b_1 &= \Delta^{-1}[u_1(x_3 - x_2) + u_2(x_1 - x_3) + u_3(x_2 - x_1)]; \\ a_2 &= \Delta^{-1}[v_1(y_2 - y_3) + v_2(y_3 - y_1) + v_3(y_1 - y_2)]; \\ b_2 &= \Delta^{-1}[v_1(x_3 - x_2) + v_2(x_1 - x_3) + v_3(x_2 - x_1)], \end{aligned} \quad (19.12)$$

где

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}.$$

В книге [16, с. 315] отмечается, что этот определитель численно равен удвоенной площади треугольника. Добавим, что он положителен при нумерации вершин с обходом против часовой стрелки.

После замен в (19.10) согласно (19.12) получим искомую матрицу связи:

$$\mathbf{A} = \Delta^{-1} \begin{pmatrix} y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 & y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \end{pmatrix}. \quad (19.13)$$

Этим завершается исследование свойств треугольного конечного элемента: потенциальная энергия деформации получена в виде (19.7) и определяется матрицей жесткости (19.8) с подстановкой (19.13).

## 2

Решим теперь задачу представления суммарной потенциальной энергии деформации упругого тела через его степени свободы. Введем вектор степеней свободы  $\mathbf{t}$  узлов прикрепленного тела, который получается отбором независимых перемещений из полной совокупности перемещений узлов вида

$$(u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_{n_1}, v_{n_1}), \quad (19.14)$$

где использована сквозная нумерация всех  $n_1$  узлов сетки. Размерность вектора  $\mathbf{t}$  равна числу степеней свободы системы  $n < 2n_1$ . Например, на рис. 19.2 показана двухэлементная модель плоского треугольно-

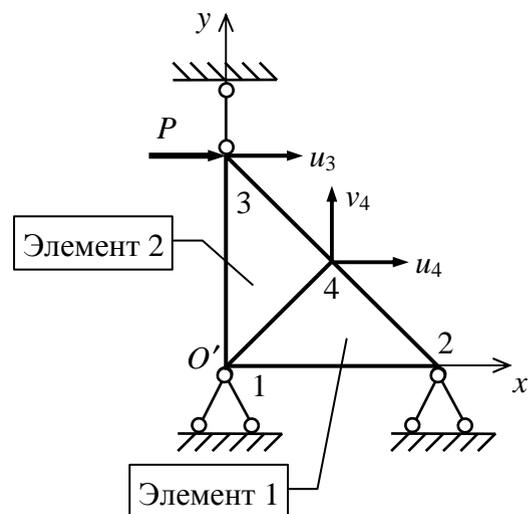


Рис. 19.2

го клина. Здесь  $n_1 = 4$ ,  $n = 3$ , результат отбора независимых перемещений из совокупности (19.14) имеет вид:

$$\mathbf{t}^T = (u_3, u_4, v_4). \quad (19.15)$$

Пусть модель содержит  $m$  конечных элементов. Перемещения узлов  $k$ -го элемента зададим вектором  $\mathbf{t}_k$  вида (19.4). Компоненты этого вектора определяются степенями свободы тела, т. е. для каждого элемента можно установить связь:

$$\mathbf{t}_k = \mathbf{I}_k \mathbf{t}. \quad (19.16)$$

Здесь  $\mathbf{I}_k$  — матрица преобразования перемещений для  $k$ -го элемента. В каждой строке этой матрицы только одна компонента может быть ненулевой; эта компонента равна единице и определяет, какая из координат вектора  $\mathbf{t}$  задает соответствующую координату вектора  $\mathbf{t}_k$ . Например, модель на рис. 19.2 образована двумя элементами. Векторы перемещений узлов элементов имеют вид (при нумерации вершин с обходом контура против часовой стрелки):

$$\mathbf{t}_1^T = (u_1, u_2, u_4, v_1, v_2, v_4) = (0, 0, u_4, 0, 0, v_4);$$

$$\mathbf{t}_2^T = (u_1, u_4, u_3, v_1, v_4, v_3) = (0, u_4, u_3, 0, v_4, 0).$$

Матрица  $\mathbf{I}_1$ , определяющая переход от вектора степеней свободы (19.15) к вектору  $\mathbf{t}_1$ , получается в виде:

$$\mathbf{I}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверьте выполнение равенства (19.16) для первого элемента и получите матрицу преобразования перемещений для второго элемента.

С помощью векторов перемещений узлов элементов устанавливается выражение для потенциальной энергии деформации всего упругого тела. При заданных сетке узлов и совокупности конечных элементов для каждого элемента можно рассчитать матрицу жесткости (19.8). Обозначим матрицу жесткости  $k$ -го элемента  $\mathbf{R}_k$  ( $k = \overline{1, m}$ ). Энергию деформации всего тела получаем суммированием энергий деформации отдельных элементов. Последние вычисляются по формуле (19.7):

$$U_1 = \sum_{k=1}^m U_{1k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \mathbf{t}_k^T \mathbf{R}_k \mathbf{t}_k.$$

Делая замену (19.16), представляем потенциальную энергию деформации как функцию вектора степеней свободы:

$$U_1 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \mathbf{t}^T \mathbf{I}_k^T \mathbf{R}_k \mathbf{I}_k \mathbf{t} = \frac{1}{2} \mathbf{t}^T \left( \sum_{k=1}^m \mathbf{I}_k^T \mathbf{R}_k \mathbf{I}_k \right) \mathbf{t}.$$

Вводя матрицу жесткости системы узлов  $\mathbf{R}$ , получаем окончательно:

$$U_1 = \frac{1}{2} \mathbf{t}^T \mathbf{R} \mathbf{t}; \quad (19.17)$$

$$\mathbf{R} \equiv \sum_{k=1}^m \mathbf{I}_k^T \mathbf{R}_k \mathbf{I}_k. \quad (19.18)$$

### 3

Сформируем строку нагрузок, действующих на все узлы тела, в виде:

$$(P_{x1}, P_{y1}, P_{x2}, P_{y2}, \dots, P_{xn_1}, P_{yn_1}). \quad (19.19)$$

Здесь для узлов, не испытывающих действие нагрузок, полагаем:

$$P_{xi} = P_{yi} = 0. \quad (19.20)$$

Из этой строки построим вектор нагрузок  $\mathbf{P}$  отбором компонент по тому же правилу, что позволило ранее сформировать вектор степеней свободы  $\mathbf{t}$  из строки (19.14). Например, в случае модели на рис. 19.2 имеем:

$$\mathbf{P}^T = (P, 0, 0).$$

Работа внешних сил на перемещениях отдельного узла имеет вид:

$$A_i = P_{xi} u_i + P_{yi} v_i.$$

Полная работа внешних сил получается суммированием этих работ и может быть записана в виде:  $A = \mathbf{P}^T \mathbf{t}$ . Таким образом, потенциальная энергия тела во внешнем поле имеет вид:

$$U_2 = -\mathbf{P}^T \mathbf{t}. \quad (19.21)$$

Для полной потенциальной энергии упругого тела имеем выражение:

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{t}^T \mathbf{R} \mathbf{t} - \mathbf{P}^T \mathbf{t}. \quad (19.22)$$

Перемещения, обеспечивающие устойчивое равновесие тела во внешнем поле, получаются из условия минимума функции (19.22). Чтобы найти минимум, построим вектор частных производных:

$$\left( \frac{\partial U}{\partial \mathbf{t}} \right)^T \equiv \left( \frac{\partial U}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial U}{\partial t_n} \right)$$

и приравняем его нулю. Для функции (19.22) несложно получить:

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{t}} = \mathbf{R} \mathbf{t} - \mathbf{P}.$$

Здесь применена формула дифференцирования квадратичной формы (19Д.1) и учтено, что матрица  $\mathbf{R}$  симметричная. Для вектора степеней свободы получаем уравнение:

$$\mathbf{R} \mathbf{t} - \mathbf{P} = 0. \quad (19.23)$$

Вспомним, что вектор степеней свободы формировался отбором из полной совокупности перемещений узлов (19.14) только степеней свободы. Можно доказать, что при таком построении вектора  $\mathbf{t}$  матрица жесткости не вырождена (см. дополнение к лек-

ции). Благодаря этому при любых нагрузках существует решение уравнения (19.23), которое можно получить обращением матрицы жесткости:

$$\mathbf{t} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{P}. \quad (19.24)$$

Физический смысл матрицы жесткости можно установить, если заметить, что при любых допустимых связями перемещениях она определяет вектор нагрузок:

$$\mathbf{P} = \mathbf{Rt} = \sum_{i=1}^n \mathbf{R}_{*i} t_i, \quad (19.25)$$

вызывающий эти перемещения. Здесь использовано обозначение  $\mathbf{R}_{*i}$  для  $i$ -го столбца матрицы жесткости. Из последней формулы можно видеть, что состояние с единственным перемещением  $t_i = 1$  достигается за счет вектора внешних сил  $\mathbf{R}_{*i}$ . Иначе говоря, **каждый столбец матрицы жесткости есть вектор нагрузок, вызывающий единичное перемещение одного из узлов.**

Наглядная интерпретация МКЭ достигается заменой сплошной системы дискретной системой материальных точек, расположенных в узлах, при той же совокупности нагрузок. Условиями эквивалентности заданного тела и заменяющей системы будем полагать совпадение перемещений узлов, а также опорных реакций. В заменяющей системе на каждую частицу действуют в общем случае силы взаимодействия с другими частицами, силы взаимодействия с землей (опорные реакции) и нагрузки. Обозначим  $\mathbf{N}$  вектор внутренних сил, действующих на узлы в направлениях степеней свободы. Реакции опор в направлениях перемещений, допускаемых связями, действовать не могут, поэтому для системы узлов имеем систему уравнений статики:  $\mathbf{N} + \mathbf{P} = 0$ . Отсюда получаем:

$$\mathbf{N} = -\mathbf{P} = -\mathbf{Rt}.$$

Последнее соотношение означает, что матрица жесткости устанавливает связь между перемещениями узлов и внутренними силами в заменяющей системе.

В заключение заметим, что предложенная реализация МКЭ является наиболее простой, что составляет ее достоинство. При разбиении тела на 2—3 элемента определить перемещения узлов по формуле (19.24) можно даже ручным счетом. Однако эта модель не содержит средств определения опорных реакций и не допускает «наклонных» шарнирно-подвижных опор (когда вместо условий (19.1)—(19.3) возможные перемещения узла задаются условием вида  $u = kv$ ,  $k \neq 0$ ). В дополнении к лекции предлагается реализация МКЭ, изложенная в работе [31] и свободная от названных недостатков.

## 4

Пусть прямоугольный клин имеет закрепленную нижнюю грань и нагружен распределенной нагрузкой (рис. 19.3, *a*). Деформированное состояние системы по МКЭ определяется числом элементов модели (рис. 19.4). Проведем расчет НДС по одноэлементной модели на рис. 19.3, *б*. В этой модели распределенная нагрузка заменена сосредоточенной нагрузкой  $P$ , которая совершает такую же работу, что и распределенная. Легко видеть, что

$$P = \frac{qa}{2}.$$

Вектор степеней свободы в данной задаче имеет вид:

$$\mathbf{t}^T = (u_3, v_3). \quad (19.26)$$

Соответствующая матрица жесткости  $\mathbf{R}$  имеет порядок 2. В ЭВМ эта матрица вычисляется по формуле (19.18) через матрицу жесткости  $\mathbf{R}_1$  элемента и матрицу преобразования  $\mathbf{I}_1$ . Предварительно в алгоритме вычисляется матрица связи  $\mathbf{A}_1$  вида (19.13) для расчета матрицы  $\mathbf{R}_1$  по формуле (19.8). Перепишем последнюю формулу с указанием в индексе номера конечного элемента:

$$\mathbf{R}_1 = V_1 \mathbf{A}_1^T \mathbf{C} \mathbf{A}_1.$$

При ручном счете пользоваться этой формулой нецелесообразно, поскольку порядок матрицы  $\mathbf{R}_1$  достаточно большой (равен 6). Удобнее сразу получить произведение  $\mathbf{A}_1 \mathbf{I}_1$  и вычислить матрицу жесткости системы в виде:

$$\mathbf{R} = V_1 (\mathbf{A}_1 \mathbf{I}_1)^T \mathbf{C} (\mathbf{A}_1 \mathbf{I}_1).$$

Произведение  $\mathbf{A}_1 \mathbf{I}_1$  однозначно определяется как матрица связи вектора деформаций элемента и вектора степеней свободы системы:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = (\mathbf{A}_1 \mathbf{I}_1) \mathbf{t}. \quad (19.27)$$

В данной задаче вектор степеней свободы (19.26) содержит третью и шестую компоненты вектора перемещений (19.4) узлов элемента. Поэтому матрица  $\mathbf{A}_1 \mathbf{I}_1$  должна содержать третий и шестой столбцы матрицы связи (19.13) рассматриваемого элемента. Дальнейшие выкладки достаточно очевидны:

$$\Delta_1 = a^2; \quad \mathbf{A}_1 \mathbf{I}_1 = \Delta_1^{-1} \begin{pmatrix} y_1 - y_2 & 0 \\ 0 & x_2 - x_1 \\ x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{pmatrix} = a^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{C} \mathbf{A}_1 \mathbf{I}_1 = \frac{Ea^{-1}}{1-\mu^2} \begin{pmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{Ea^{-1}}{1-\mu^2} \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ 0 & 1 \\ \frac{1-\mu}{2} & 0 \end{pmatrix};$$

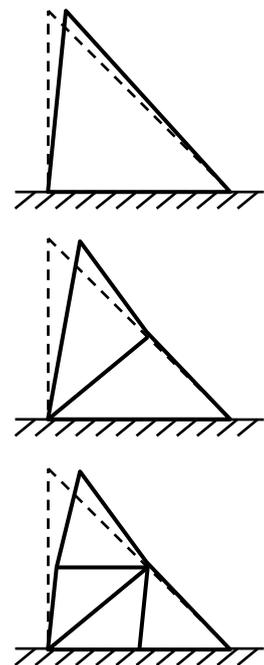
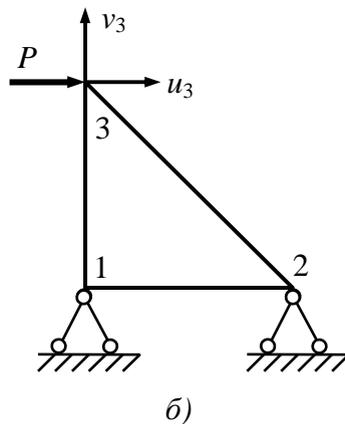
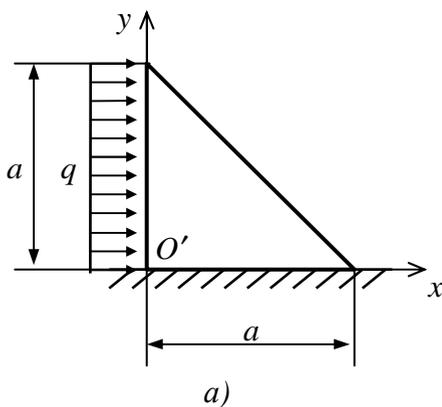


Рис. 19.3. Заданное твердое тело (а) и его одноэлементная модель (б).

$u_3, v_3$  — перемещения свободной вершины

Рис. 19.4

$$V_1 = \frac{a^2 \delta}{2}; \quad \mathbf{R} = V_1 (\mathbf{A}_1 \mathbf{I}_1)^T \mathbf{C} (\mathbf{A}_1 \mathbf{I}_1) = \frac{a^2 \delta}{2} \cdot \frac{E a^{-2}}{1 - \mu^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ 0 & 1 \\ \frac{1 - \mu}{2} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{E \delta}{2(1 - \mu^2)} \begin{pmatrix} 1 - \mu & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{R}^{-1} = 2 \frac{1 - \mu^2}{E \delta} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 - \mu & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \end{pmatrix} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{P} = 2 \frac{1 - \mu^2}{E \delta} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 - \mu & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \frac{1 - \mu^2}{E \delta} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 - \mu \\ 0 \end{pmatrix} P.$$

Деформированное состояние:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \mathbf{A}_1 \mathbf{I}_1 \mathbf{t} = a^{-1} \cdot 2 \frac{1 - \mu^2}{E \delta} \frac{2}{1 - \mu} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{4}{a \delta} \frac{1 + \mu}{E} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ P \end{pmatrix}.$$

Итак, согласно одноэлементной модели установлены деформации:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0; \quad \gamma_{xy} = \frac{4}{a \delta} \frac{1 + \mu}{E} P.$$

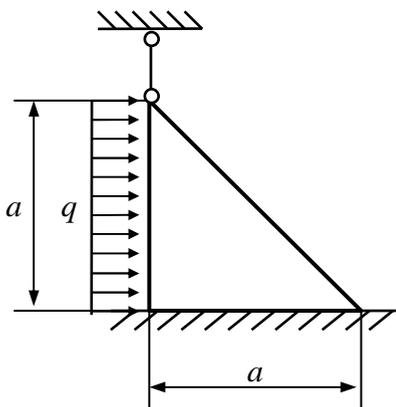


Рис. 19.5

Этому соответствует напряженное состояние, определяемое обобщенным законом Гука:

$$\sigma_x = \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = G \gamma_{xy} = \frac{P}{0,5 a \delta}.$$

Заметим, что касательное напряжение получается как отношение нагрузки к площади горизонтального сечения посередине клина.

Для самопроверки рекомендуется провести расчет НДС конструкции на рис. 19.5 по двухэлементной модели на рис. 19.2.

### Дополнения к лекции

#### Дифференцирование квадратичной формы

Докажем, что вектор частных производных квадратичной формы

$$y(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x},$$

с некоторой матрицей  $\mathbf{B}$  порядка  $n$  имеет вид:

$$\frac{\partial y}{\partial \mathbf{x}} = (\mathbf{B} + \mathbf{B}^T) \mathbf{x}. \quad (19Д.1)$$

Действительно, при любом заданном  $k = \overline{1, n}$ :

$$y = \sum_{\substack{i \neq k \\ j \neq k}} B_{ij} x_i x_j + \sum_{j \neq k} B_{kj} x_k x_j + \sum_{i \neq k} B_{ik} x_i x_k + B_{kk} x_k^2.$$

Следовательно, при любом  $k$ :

$$\frac{\partial y}{\partial x_k} = \sum_{j \neq k} B_{kj} x_j + \sum_{i \neq k} B_{ik} x_i + 2B_{kk} x_k = (\mathbf{B}\mathbf{x})_k + (\mathbf{B}^T \mathbf{x})_k,$$

что может быть записано в виде (19Д.1).

### Уравнения МКЭ без упрощений

Введем вектор перемещений  $\mathbf{t}_\Sigma$  в виде (19.14), т. е. как совокупность перемещений узлов тела, снятого с опор. Введем вектор внешних сил, приложенных к узлам, в виде

$$\mathbf{P}_\Sigma^T = (P_{\Sigma x_1}, P_{\Sigma y_1}, P_{\Sigma x_2}, P_{\Sigma y_2}, \dots, P_{\Sigma x_{n_1}}, P_{\Sigma y_{n_1}}). \quad (19Д.2)$$

Здесь для узлов, не испытывающих действие внешних сил, полагаем

$$P_{\Sigma x_i} = P_{\Sigma y_i} = 0. \quad (19Д.3)$$

Отличие вектора внешних сил (19Д.2) от вектора нагрузок (19.19) в том, что для прикрепленных узлов внешние силы могут содержать как нагрузки, так и опорные реакции. Будем вначале считать, что опорные связи направлены вдоль координатных осей, т. е. условия для перемещений опорных узлов имеют вид (19.1)—(19.3). Чтобы подчеркнуть, что компонента  $P_{\Sigma i}$  задает внешнюю силу, действующую на прикрепленный узел по линии опорной связи, будем обозначать ее  $X_i$ . Итак, для такой компоненты можем записать:

$$X_i \equiv P_{\Sigma i} = P_i + R_i, \quad (19Д.4)$$

где  $P_i$  — компонента полного вектора нагрузок (19.19);  $R_i$  — опорная реакция.

При действии внешних сил (19Д.2) на упругое тело, снятое с опор, для полной потенциальной энергии вместо выражения (19.22) можем записать такое же по смыслу выражение:

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{t}_\Sigma^T \mathbf{R} \mathbf{t}_\Sigma - \mathbf{P}_\Sigma^T \mathbf{t}_\Sigma. \quad (19Д.5)$$

Здесь матрица жесткости  $\mathbf{R}$  по-прежнему определяется выражением (19.18), в котором матрица  $\mathbf{I}_k$  задает преобразование:

$$\mathbf{t}_k = \mathbf{I}_k \mathbf{t}_\Sigma.$$

При заданных внешних силах  $\mathbf{P}_\Sigma$  выражение (19Д.5) определяет некоторую функцию  $U = U(\mathbf{t}_\Sigma)$ . Вектор  $\mathbf{t}_\Sigma$ , удовлетворяющий уравнению

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{t}_\Sigma} = 0, \quad (19Д.6)$$

называется стационарной точкой функции  $U(\mathbf{t}_\Sigma)$ . В данном случае условие стационарности (19Д.6) можно представить в виде:

$$\mathbf{R}\mathbf{t}_\Sigma - \mathbf{P}_\Sigma = 0. \quad (19Д.7)$$

В отличие от уравнения (19.23) в полученном уравнении вектор свободных членов содержит неизвестные компоненты вида (19Д.4). Но даже при известных опорных реакциях решить уравнение (19Д.7) невозможно, поскольку матрица жесткости в данном случае вырождена. При выводе этого уравнения не использовались сведения о прикреплении тела к земле, мы получили векторное уравнение для перемещений точек свободного тела при заданных внешних силах, которое решается неоднозначно.

Будем рассматривать равенства (19Д.7) как систему уравнений относительно перемещений и опорных реакций. Если дополнить эту систему уравнений условиями прикрепления к земле (19.1)—(19.3), то такая расширенная система решается однозначно. Покажем это.

Произведем перестановку компонент вектора перемещений так, чтобы вначале шли возможные перемещения (не уничтоженные связями), а затем невозможные перемещения (уничтоженные связями). После такой перестановки можно записать:

$$\mathbf{t}_\Sigma = \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{t}_X \end{pmatrix},$$

где  $\mathbf{t}$  — подвектор степеней свободы (перемещений, не уничтоженных связями),  $\dim \mathbf{t} = n$ ;  $\mathbf{t}_X$  — подвектор нулевых перемещений,  $\dim \mathbf{t}_X = 2n_1 - n$ . Произведем такую же перестановку компонент вектора внешних сил и представим его в виде:

$$\mathbf{P}_\Sigma = \begin{pmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{X} \end{pmatrix},$$

где  $\mathbf{P}$  — подвектор нагрузок, действующих в направлении возможных перемещений;  $\mathbf{X}$  — подвектор неизвестных внешних сил (19Д.4), т. е. сил, содержащих реакции. Далее будем рассматривать векторы  $\mathbf{t}_\Sigma$  и  $\mathbf{P}_\Sigma$  с переставленными компонентами. Выражение для потенциальной энергии (19Д.5) остается справедливым (если при расчете матрицы жесткости  $\mathbf{R}$  пользоваться матрицами  $\mathbf{I}_k$  с переставленными столбцами). Условие стационарности (19Д.7) также не изменится. Разобьем матрицу жесткости на блоки:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} \\ \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} \end{pmatrix}, \quad (19Д.8)$$

где блок  $\mathbf{R}_{11}$  имеет порядок  $n$ . Уравнение (19Д.7) вместе с условиями прикрепления можно представить в виде:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} \\ \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{t}_X \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{X} \end{pmatrix} = 0; \\ \mathbf{t}_X = 0. \end{cases} \quad (19Д.9)$$

Сделаем подстановку второго уравнения этой системы в первое. Получим:

$$\begin{cases} \mathbf{R}_{11}\mathbf{t} - \mathbf{P} = 0; \\ \mathbf{R}_{21}\mathbf{t} - \mathbf{X} = 0. \end{cases} \quad (19Д.10)$$

Векторы  $\mathbf{t}$  и  $\mathbf{P}$  совпадают с соответствующими векторами упрощенного МКЭ, рассмотренного в лекции. Несложно также установить, что блок  $\mathbf{R}_{11}$  совпадает с матрицей

жесткости  $\mathbf{R}$  упрощенного МКЭ. Это означает, что первое из уравнений системы (19Д.10) совпадает с уравнением (19.23) упрощенного МКЭ. Покажем, что это уравнение однозначно решается.

Требуется доказать, что  $\mathbf{R}_{11}$  — невырожденная матрица. Доказательство будет основано на следующих утверждениях:

— условия стационарности (19Д.6) вместе с условиями прикрепления  $\mathbf{t}_x = 0$  определяют перемещения системы в равновесном состоянии;

— в неизменяемой системе перемещения возможны только при действии нагрузок, которые не совпадают с опорными реакциями по точке приложения и линии действия.

Первое утверждение означает, что равновесие тела достигается при условии (19Д.10). Нагрузки, оговоренные во втором утверждении, образуют вектор  $\mathbf{P}$ . Это утверждение означает, что не может быть  $\mathbf{R}_{11}\mathbf{t} = 0$  при  $\mathbf{t} \neq 0$ . Отсюда и следует невырожденность матрицы  $\mathbf{R}_{11}$  [11, с. 69].

Итак, первое из уравнений (19Д.10) решается однозначно относительно  $\mathbf{t}$ . Второе уравнение решается вслед за первым относительно вектора внешних сил  $\mathbf{X}$  и позволяет установить опорные реакции.

Покажем теперь, как можно учесть наклонные опорные связи. Действие этих связей приводит к дополнительному условию для перемещений:

$$\mathbf{V}^T \mathbf{t}_\Sigma = 0, \quad (19Д.11)$$

где  $\mathbf{V}$  — матрица дополнительных условий для перемещений узлов, имеющая размерность  $2n_1 \times k$  ( $k$  — число скалярных условий). Например, если имеется одна связь, заданная условием  $u = kv$ , то матрица  $\mathbf{V}$  есть вектор-столбец, имеющий только две ненулевых компоненты со значениями 1 и  $-k$ .

Удалим из системы все опоры, уничтожающие степени свободы, и оставим только наклонные опоры. Для такой системы функция полной потенциальной энергии  $U = U(\mathbf{t}_\Sigma)$  по-прежнему представляется в виде (19Д.5). Состоянию устойчивого равновесия соответствует точка минимума функции  $U(\mathbf{t}_\Sigma)$  при условии (19Д.11). Эту точку находим методом неопределенных множителей Лагранжа. Составляем функцию Лагранжа в виде:

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{t}_\Sigma^T \mathbf{R} \mathbf{t}_\Sigma - \mathbf{P}_\Sigma^T \mathbf{t}_\Sigma - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{V}^T \mathbf{t}_\Sigma, \quad (19Д.12)$$

где  $\boldsymbol{\lambda}$  — вектор неопределенных множителей. Дифференцируя эту функцию по  $\mathbf{t}_\Sigma$ , получаем условия равновесия:

$$\begin{cases} \mathbf{R} \mathbf{t}_\Sigma - \mathbf{P}_\Sigma - \mathbf{V} \boldsymbol{\lambda} = 0; \\ \mathbf{V}^T \mathbf{t}_\Sigma = 0. \end{cases} \quad (19Д.13)$$

Неизвестными здесь являются векторы  $\mathbf{t}_\Sigma$ ,  $\boldsymbol{\lambda}$ , а также компоненты вектора  $\mathbf{P}_\Sigma$  вида (19Д.4).

Пусть существуют уничтоженные степени свободы, т. е.  $n < 2n_1$ . Тогда систему (19Д.13) следует решать при условии  $\mathbf{t}_x = 0$ . Пользуясь блочным представлением матрицы жесткости, приходим к системе уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \begin{array}{cc} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} \\ \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{t}_X \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{X} \end{pmatrix} - \mathbf{B}\boldsymbol{\lambda} = 0; \\ \mathbf{t}_X = 0; \\ \mathbf{B}^T \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{t}_X \end{pmatrix} = 0. \end{array} \right. \quad (19Д.14)$$

Полученная система близка по форме к системе (19Д.9) и решается аналогично: вначале определяются неизвестные  $\mathbf{t}$  и  $\boldsymbol{\lambda}$ , а затем вектор  $\mathbf{X}$ , содержащий опорные реакции. При этом не удастся получить реакции наклонных опор, а только тех, что уничтожили степени свободы  $x$  или  $y$ .